

**Региональный этап всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

Мурманская область

Шифр участника: М1011

Класс: 10

Количество баллов: 35

Результат участия: призер

183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ ОТ " _____ " _____ 20 ____ г.

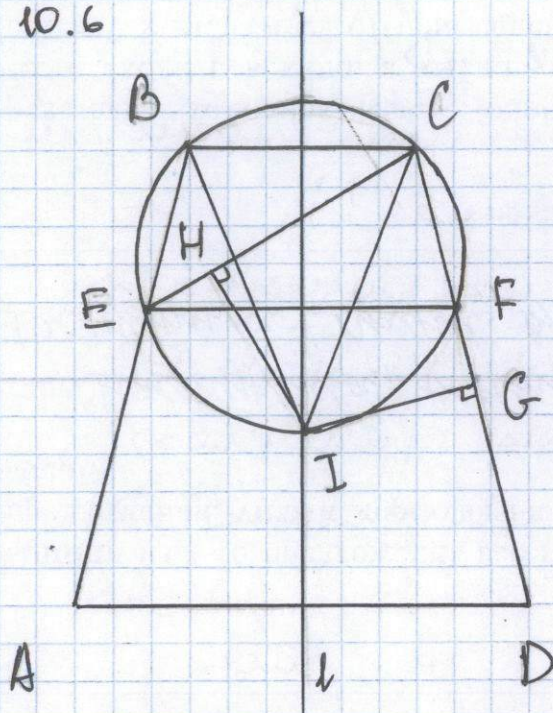
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

1011

5	6	7	8
0	7	0	0

21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838.

10.6



$\downarrow$ дано: трап. $ABCD$;
 $AB \parallel CD$; $\odot$ опр. ω
 с центром I кас.
 AB , CD в G и DA ;
 опр. окол. $\triangle BIC$
 $\cap AB$ в E и CD в F
 $\downarrow$ -то: CE касается
 опр. ω

Док-во

1) $ABCD$ - равнобокая трапеция $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle EBC = \angle FCB$$

2) $EBCF$ вписан $\Rightarrow \angle EFC + \angle EBC =$

$$= \angle FCB + \angle FCB = 180^\circ$$

$$\text{Но } \angle EBC = \angle FCB \Rightarrow \angle EFC = \angle FCB$$

Значит, $EBCF$ - тоже равнобокая трапеция $\Rightarrow EF \parallel BC \parallel AD$

3) Проведём серединный перпендикуляр к BC (прямая l).

$EBCF$ - равнобокая трапеция $\Rightarrow$

$\Rightarrow l$ - ср. перпендикуляр к EF

$ABCD$ - равнобокая трапеция $\Rightarrow$

$\Rightarrow l$ - ср. перпендикуляр к AD

~~4) (ABCD)~~

4) Трапеция $ABED$ - это часть равнобедренного треугольника $\triangle ALD$

($L = AB \cap DC$) $\Rightarrow I$ как центр впис. в треугольнике окружности



и 1011

лежит на биссектрисе
угла $\angle A$. Но в $\triangle ALD$
 $AL = DL \Rightarrow$ биссектриса
совпадает с медианой
и высотой $\Rightarrow I$
лежит на сер.
перпендикуляре к AD ,

т.е. на l .

5) l - сер. перпенд. к EF

$I \in l$

I лежит на сер. перпенд.

EF

$\Rightarrow I$ - середина
отрезка EF

6) I - сер. $\overline{EF} \Rightarrow \angle ECI = \angle FCI$

7) Опустим из I перпендикуляр
на BC (и - точка пересечения)

8) В $\triangle CIH$ и $\triangle CIG$:

$\angle HIC = \angle GIC = 90^\circ$

$\angle HCI = \angle GCI$

IC - общее

$\Rightarrow \triangle CIH = \triangle CIG \Rightarrow$
 $\Rightarrow IH = IG$

8) Получается, что расстояние от
 I - центра окр. ω до CE равно
радиусу этой окр. $\omega \Rightarrow CE$ - касе-
тельная к ω

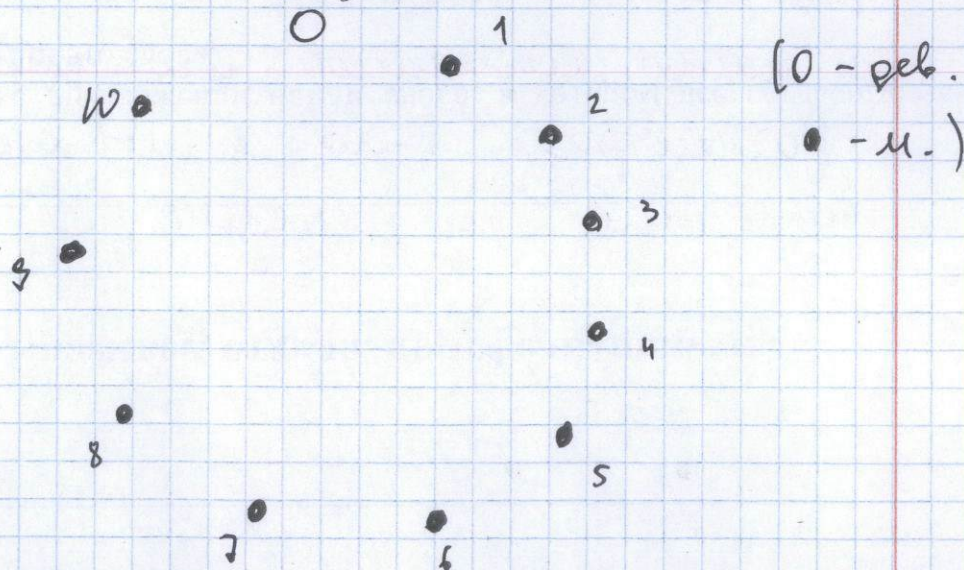
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-62

№ _____ от " _____ " _____ 20__ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20__ г.

М 1041

10.7

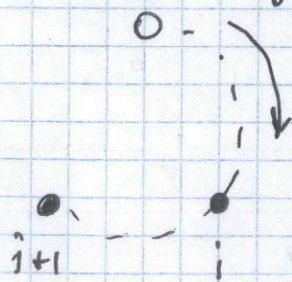
- 1) Познакомим девочку, которая состоит
в 10 хороших парях, и 10
мальчиков, с которыми она
эти пары образует, по схеме:



Пропустим этих мальчиков
по часовой стрелке.

Заметим, что если на одной
из дуг между мальчиком и
девочкой поровну мальчиков и
девушек, то и на другой дуге
между ними будет поровну
мальчиков и девочек (если на
одной дуге к мальчикам и
к девочкам, то на другой
 $n-k-1$ мальчиков и $n-k-1$
девочек, т.к. сами мальчик и
девочка в паре не считаются;
 n - кол-во мальчиков или девочек).

Рассмотрим i -ую и $i+1$ -ую
мальчики по схеме.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
 ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
 ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
 "Мурманский областной
 центр дополнительного
 образования детей
 "ЛАПЛАНДИЯ"
 183031, г. Мурманск,
 пр. Героев-Североморцев, 2
 тел. 31-35-51, 31-34-82
 № _____ от " ____ " _____ 20 ____ г.
 на иск. № _____ от " ____ " _____ 20 ____ г.

По заявленной стрелке МНОЖ
 от девочки до 1-ого
 мальчика одинаковое
 кол-во мальчиков и
 девочек и до 1+1-ого
 одинаковое кол-во.
 Но 1-ый мальчик

входит в число мальчиков от
 девочки до 1+1-ого мальчика →
 ⇒ между 1-ым и 1+1-ым
 мальчиком девочек ровно на
 одну больше, чем мальчиков.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ

"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"

183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " ____ " _____ 20 ____ г.

на исх. № _____ от " ____ " _____ 20 ____ г.

М 1041

№ 8

Очевидным решением этой
системы уравнений являются
пары $(2; 0)$ и $(0; 2)$.

Других решений, видимо, нет,
но кто бы ещё знал, почему.

10.5

Положим, что число f содержится
в множестве A .

Рассмотрим сумму $a+b = f$
 $a+b \in A \Rightarrow ab \in A$.

$$(a+b)^2 = f^2$$

~~Известно, что~~

$$\text{Известно, что } (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\text{Значит } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{f^2}{4}$$

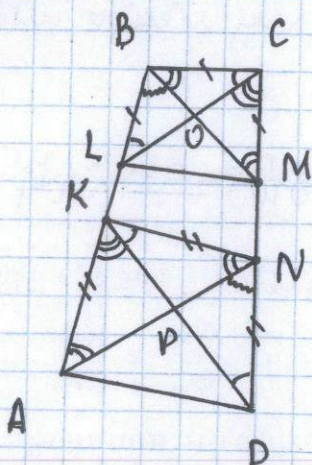
$$\frac{f^2}{4} - \frac{4f}{4} + \frac{4}{4} = \frac{(f-2)^2}{4} \geq 0$$

.....?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 7 | 7 | 7 | 7 |

(Handwritten signatures and marks)

10.3



Дано: выпуклый четырёх-
угольник ABCD; K и L ∈
AB (AK < AL); M и N ∈ CD
(CM < CN); AK = KN = DN;
BL = BC = CM; BCNK - вы-
санный четырёхугольник
Доказать: ADML вписан

Док-во

- 1) BCNK вписан $\Rightarrow \angle CNK + \angle CBK = 180^\circ$;
 $\angle BKN + \angle BCN = 180^\circ$
- 2) $\angle CNK + \angle DNK = 180^\circ$ (как смежные),

$$\text{но } \angle CNK + \angle CBK = 180^\circ \text{ тоже } \Rightarrow \angle DNK = \angle CBK$$

$$\begin{array}{l} \text{Аналогично } \angle BKN + \angle AKN = 180^\circ \\ \angle BKN + \angle BCN = 180^\circ \end{array} \left| \Rightarrow \angle AKN = \angle BCN \right.$$

3) Рассмотрим $\triangle CBL$ и $\triangle DNK$, в них:

$$\angle DNK = \angle CBL$$

$$\begin{array}{l} BL = BC \\ KN = DN \end{array} \left| \Rightarrow \frac{KN}{BL} = \frac{DN}{BC} \right| \Rightarrow \triangle CBL \sim \triangle DNK$$

(по двум сторонам и углу между ними)

$$\text{В } \triangle CBL \quad BL = BC \Rightarrow \angle BLC = \angle BCL$$

$$\text{Но } \triangle CBL \sim \triangle DNK \Rightarrow \angle NDK = \angle NKD = \angle BLC = \angle BCL$$

$$\text{Аналогично } \triangle BCM \sim \triangle AKN \left(\angle AKN = \angle BCM; \frac{AK}{BC} = \frac{KN}{CM} \right),$$

$$\text{и } \angle KAN = \angle KNA = \angle CBM = \angle CMB$$

$$\begin{array}{l} 4) \angle AKD = \angle AKN - \angle NKD \\ \angle MCL = \angle BCM - \angle BCL \\ \angle NKD = \angle BCL \text{ (из п.3)} \\ \angle AKN = \angle BCM \text{ (из п.2)} \end{array} \left| \Rightarrow \angle AKD = \angle MCL \right.$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20__ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20__ г.

M 1011

$$\angle DNA = \angle DNK - \angle KNA$$

$$\angle LBM = \angle CBK - \angle CBM$$

$$\angle DNK = \angle CBK \text{ (п. 2)}$$

$$\angle KNA = \angle CBM \text{ (п. 3)}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle DNA = \angle LBM$$

5) Пусть $BM \perp LC$ и $AN \perp KD$

6) В $\triangle LOB$ и $\triangle DPN$:

$$\angle OBL = \angle PND$$

$$\angle BOL = \angle NDP$$

$\Rightarrow \triangle LOB \sim \triangle DPN$ (по
угл углам) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{DP}{LO} = \frac{DN}{BL} ; \angle BOL = \angle NDP$$

В $\triangle МОС$ и $\triangle АРК$:

$$\angle OCM = \angle PKA$$

$$\angle CMO = \angle KAP$$

$\Rightarrow \triangle МОС \sim \triangle АРК$
(по угл углам) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AP}{OM} = \frac{AK}{CM}$$

$$\text{Но } DN = AK, \text{ а } BL = CM \Rightarrow \frac{DP}{LO} = \frac{AP}{OM}$$

$$\begin{array}{l}
 7) \angle BOL + \angle LOM = 180^\circ \\
 \angle NPD + \angle DPA = 180^\circ \\
 \angle BOL = \angle NPD
 \end{array}
 \left| \Rightarrow \angle LOM = \angle DPA \right.$$

8) В $\triangle LOM$ и $\triangle DPA$:

$$\begin{array}{l}
 \frac{DP}{LO} = \frac{AP}{OM} \\
 \angle LOM = \angle DPA
 \end{array}
 \left| \Rightarrow \triangle LOM \sim \triangle DPA \text{ (по двум сторонам и углу между ними)} \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \angle PAD = \angle OML$$

$$\begin{array}{l}
 9) \angle LAD = \angle KAN + \angle PAD \\
 \angle CML = \angle CMB + \angle OML \\
 \angle PAD = \angle OML \\
 \angle KAL = \angle CMB
 \end{array}
 \left| \Rightarrow \angle LAD = \angle CML \right.$$

$$10) \angle DML = 180^\circ - \angle CML$$

$$\begin{array}{l}
 \angle LAD + \angle DML = \angle LAD + 180^\circ - \angle CML = 180^\circ \Rightarrow \\
 \Rightarrow ADML - \text{вписан}
 \end{array}$$

258

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20__ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20__ г.

10.4

1) Найдём кол-во чёрных клеток.

~~Всего в таблице 100 столбцов и 100 строк.~~

Во всех ста строках равное кол-во чёрных клеток, значит, минимальное кол-во чёрных клеток равно

$$0 + 1 + 2 + \dots + 99 = 99 \cdot 50 = 4950, \text{ а}$$

$$\text{максимальное} - 100 + 99 + 98 + \dots + 1 = \\ = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Заметим, что, если во всех ста столбцах равное кол-во чёрных клеток, то общее кол-во чёрных

* в нашей сумме все слагаемые равны и не меньше 0 и не больше 100

клеток должно быть кратно 100.

~~Так~~ Так как кол-во черных клеток лежит в диапазоне от 4950 до 5050, то их может быть только 5000.

В сумме $S = 0 + 1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ - 101 слагаемое. А нам нужна сумма из 100 слагаемых и равная 5000*. Единственный вариант получить такую сумму - выбрать из 3 слагаемое 50.

Значит, в таблице будут 50 строк с кол-вом черных клеток от 0 до ~~49~~ 49 и 50 строк с кол-вом черных клеток от 51 до 100.

2) Рассмотрим отдельную строку из k клеток. Пусть нам надо запросить n ($n < \frac{k}{2}$, k - четное) клеток, так, чтобы кол-во N

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
163031, г. Мурманск,
пр. Героев - Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

М1011

горизонтальных пар
соседних разноцветных
клеток было миним-
ально. У каждой
закрашенной клетки
по горизонтали не
больше двух соседей $\Rightarrow$

$\Rightarrow N \leq 2n$. При этом при $n < \frac{k}{2}$
можно достичь $2n$ (например,
если закрасить эту клетку слева,
чую и так далее через одну).
Заметим, что если нужно закрасить
 $n > \frac{k}{2}$ клеток, то это равносильно
тому, чтобы не закрасить $k - n < \frac{k}{2}$
клеток.

~~В любом случае $k = 100$ и все
это строк можно разбить на 50
пар с равным N (если $n = 0$, то
 $k - n = 100$)~~

Значит, при $n > \frac{k}{2}$ N равно
 N при $k-n < \frac{k}{2}$.

В нашем случае $k=100$ и $\frac{k}{2}=50$.

Если $n=51$, то $k-n=49$, т.е. N
при 51 равно N при 49.

Таким образом можно сопоставить
все строки с $n > \frac{k}{2}$ (их 50) со
строками с $n < \frac{k}{2}$ (их тоже 50).

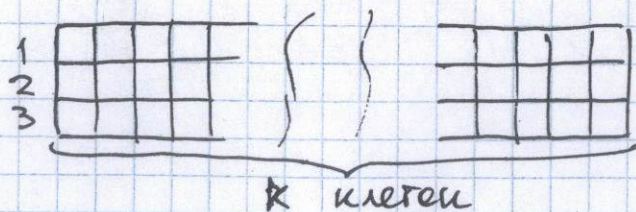
Тогда общее кол-во ~~гориз.~~ пар
соседних разноцветных клеток
равно: $2 \cdot ((N \text{ при } 0) + \dots + (N \text{ при } 49))$.

$N_{\max} = 2n \Rightarrow$ это кол-во не больше

$$2 \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \dots + 2 \cdot 49) = 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 49) <$$

$$= \frac{4 \cdot 50 \cdot 49}{2} = 4900$$

3) Рассмотрим три соседние строки:



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от "____" _____ 20__ г.
на исх. № _____ от "____" _____ 20__ г.

МЮ11

Получаем, сколько
всего вертикальных
пар соседних районов.
клеток тут может
быть (Z) . Всего вертикаль-
ных пар $- 2k \Rightarrow$

$$\Rightarrow Z \leq 2k.$$

При ~~2k~~

При $Z \geq 2k$ получается, что у
каждой черной клетки у второй
стороны сверху и снизу - белые
клетки, а у каждой белой - черные.
Тогда кол-во черных клеток в
1ой и 2ой странах должно
быть равным, что не может быть
(они отличаются хотя бы на 1).
Значит, во 2ой стране есть
хотя бы одна клетка, у
которой есть сосед того же

ответ $\Rightarrow \mathbb{Z} \leq 2k-1$.

~~Всего~~ Всего можно 88-ю способами выбрать 3 соседние строки из нашей таблицы. При этом все пары, кроме пар между 101 и 201 и 8801 и 10001 строками, считаются дважды. Добавим к этой сумме максимальные $\mathbb{Z}$ для 1-2 строк и 88-100 строк. Эти $\mathbb{Z}$ равны k . Тогда удвоенное кол-во всех подходящих вертикальных пар равно:

$$(2k-1) \cdot 98 + 2k$$

$$k = 100 \Rightarrow \mathbb{Z}_{\text{общее}} = \frac{198 \cdot 98 + 200}{2} =$$

$$= \del{198 \cdot 98 + 200} 9851$$

4) Общее кол-во подходящих пар не больше, чем $4800 + 9851 =$
 $= 14751$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

5) Чтобы составить
такую раскраску,
нужно красить следу-
ющим образом:

~~4-ю 2-ю~~

М 1011

В 1ой строке закрашиваем 100 клеток;
Во 2ой - ни одной;
В 3ей - 88; В 4ой - одну, сосед-
ствующую с белой у 3ей строки;
В 5ой - 88 (не закрашиваем соседа
черной у 4ой строки и еще одну
любую) и так далее.

В общем:

Если номер строки четен, то мы
не закрашиваем те клетки, у
которых соседи у пред. строки
закрашены.

Если номер строки нечетен, то

мы не запрашиваем те клетки,
у которых ~~есть соседи~~ соседи из
предыдущей строки запрошено,
и ещё одну "какую-то" клетку
(эту "какую-то" клетку мы не
запрашиваем в том столбце, где
ещё не было "какой-то" клетки,
это возможно, т.к. всего "каких-то"
клеток - 48 (по одной в строках 3, 5,
7 и т.д.), а столбцов всего 100.

10.1

1) Пусть: $f_1(x) = ax^2 + bx + c$
 $f_2(x) = ax^2 + bx + c + k_1$
 $f_3(x) = ax^2 + bx + c + k_2$

$$\vdots$$
$$f_{100}(x) = ax^2 + bx + c + k_{99}$$

Тогда: $f_1(x) = f_1 + 0$
 $f_2(x) = f_1 + k_1$
 $f_3(x) = f_1 + k_2$

$$\vdots$$
$$f_{100}(x) = f_1 + k_{99}$$

2) Пусть: $f_n = f_1 + k_{n-1}$
 $f_{n+1} = f_1 + k_n$

$$f_{n+1} - f_n = k_n - k_{n-1} \Rightarrow f_{n+1} = f_n + k_n - k_{n-1}$$

Тогда: $f_1 = f_1 + 0$
 $f_2 = f_1 + k_1 - 0$
 $f_3 = f_2 + k_2 - k_1$
 $\vdots$

$$f_{100} = f_{99} + k_{99} - k_{98}$$

$$f_1 = f_{100} + 0 - \cancel{k_{99}}, k_{99}$$

Теперь:

Если $f_n(x) \geq 0$, то ~~$f_{n+1} = f_n$~~

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + k_n - k_{n-1} = k_n - k_{n-1}$$

3) ~~$f_2(x_1) \geq k_1$~~

x_i - это корень $f_i \Rightarrow f_i(x_i) \geq 0$

Тогда: $f_2(x_1) \geq k_1$

$$f_3(x_2) \geq k_2 - k_1$$

$\vdots$

$$f_{100}(x_{99}) \geq k_{99} - k_{98}$$

$$f_1(x_{100}) \geq -k_{99}$$

~~Сумма~~ Сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots +$

$$+ f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100}) \geq k_1 + k_2 - k_1 + \dots +$$

$$+ k_{99} - \cancel{k_{98}} - k_{99} = 0$$

Ответ: 0

10.2

МЮН

- 1) У нас есть два НОК. Назовём их НОК_1 и НОК_2 (НОК синих и НОК красных)
 $\text{НОК}_1 + \text{НОК}_2 = 10000k' + 2016$, где $k' \in \mathbb{N}$

Заметим, что $10000k' + 2016 : 8$, т.к.
 $10000 : 8$ и $2016 : 8$.

Вспомним, как считается НОК нескольких чисел. Он состоит из произведения всех простых множителей, встречающихся в разложении этих чисел, взятых с наибольшим показателем степени.

Среди пяти послед. натуральных чисел есть хотя бы одно, кратное 8. Значит, хотя бы один НОК кратен 8. Но раз сумма НОКов кратна 8, то и второй

НОК тоже должен быть кратен 8,

т.е. $\text{НОК}_1 : 8$

$\text{НОК}_2 : 8$

Так как одно число не могло
попасть в оба НОКа, то среди
всех данных чисел должно быть
два числа, кратных 8. При этом
эти два числа должны быть
последовательными кратными 8
числами, т.е. $8k, 8k+8$.

Т.к. если они будут не
последовательными, то не влезут
в 1000.

Итак, среди всех данных
чисел есть $8k$ и $8(k+1)$.

k и $k+1$ — два послед. натуральных
числа, значит, одно из них четно,
а значит, одно из чисел $8k$
или $8(k+1)$ кратно 16.

Следовательно, если у НОКов
тоже кратен 16.

МЮН

2) Выполним про сумму НОКов

$$НОК_1 + НОК_2 = 10000k' + 2016$$

$$10000k' + 2016 : 16, \text{ т.к. } 10000 : 16 \text{ и } 2016 : 16$$

При этом если у НОКов тоже
кратен 16, значит, второй НОК
тоже должен ~~быть~~ быть кратен
16, ~~но~~ но такое не может
быть, т.к. среди 10 послед.
натуральных чисел не может
быть двух, кратных 16.

Ответ: не может